

音階中12個半音 是怎麼定出來的？

目前世界的音樂主流源於西方古典音樂，大家都會隨口唱出 Do、Re、Mi、Fa、Sol、La、Si、Do 這樣一個完整的八度，也有很多人知道一個八度中，其實包含了十二個半音，也就是人類的音樂是個十二音系統。對於這十二個半音的高低，古人是如何定出來呢？

畢達哥拉斯與畢氏音階

畢達哥拉斯是古希臘時代的偉大數學家，以他名字命名的「畢氏定理」更是人們最熟悉的數學定理，但大多數人可能不知道他在音樂上也有重要的貢獻。

畢達哥拉斯彈奏不同長度的琴弦時，發現如果兩弦長比是 2:1（頻率比 1:2，八度）、3:2（頻率比 2:3，完全五度，以下簡稱五度）、4:3（頻率比 3:4，完全四度，以下簡稱四度）時，就會發出非常和諧悅耳的和聲。畢氏學派崇尚整數與調和（harmony），整數比象徵規律、秩序與調和之美，所以，畢達哥拉斯希望在兩個八度音間插入六個整數比，形成一個完整音階。

現代物理已經知道聲音的高低是由發聲體的振動頻率決定，頻率越高，聲音就越高，而琴弦或空氣柱的長度和頻率成反比。比方琴弦長度變為 2 倍，頻率就會變為原來的一半；琴弦長度變為 $\frac{2}{3}$ 倍，頻率就會變為原來的 $\frac{3}{2}$ ，依此類推。另外，在音樂上，頻率變為 2 倍就是升八度，頻率減半就是降八度。

畢達哥拉斯假設兩個八度音（比方 Do 和高八度的 Do）的頻率是 1 和 2，然後使用「五度相生法」，也就是從 1 出發，不斷將琴弦長度變為 $\frac{2}{3}$ 倍，這樣就能使頻率變為 $\frac{3}{2}$ 倍而得到上五度音；如果頻率變為 $\frac{3}{2}$ 倍後超過 2、跑到高一個八度去了，就把琴弦長度再變為 2 倍，也就是讓頻率減半回到 2 以內。

這樣一系列操作下來，配合現代音名得到的頻率比如下（「→」都表示琴弦長 $\times \frac{2}{3}$ ，所以頻率



$\times \frac{3}{2}$ ，若頻率超過 2，則琴弦長再 $\times 2$ ，使頻率 $\div 2$ ）：
 $1(C) \rightarrow \frac{3}{2}(G) \rightarrow \frac{9}{4}(\div 2) = \frac{9}{8}(D) \rightarrow \frac{27}{16}(A) \rightarrow \frac{81}{32}(\div 2) = \frac{81}{64}(E) \rightarrow \frac{243}{128}(B)$

如果 B 再往上五度得到的是「升 F」（ $\frac{243}{128}(B) \rightarrow \frac{729}{256}(\div 2) = \frac{729}{512}(\#F)$ ），而不是完全四度的「F」，所以畢達哥拉斯回到起點，再從 1 開始，將琴弦長變為 $\frac{3}{2}$ 倍，使頻率變為 $\frac{3}{2}$ ，就得到下五度的 F，然後再將琴弦長減半，使頻率變為 2 倍： $\frac{3}{2} \times 2 = \frac{4}{3}$ ，如此便完美得到完全四度頻率應有的簡單整數比值 $\frac{4}{3}$ ，完成了完整的「畢氏音階」。（下表起始音設為 C）

C	D	E	F	G	A	B	高八度 C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

平均律解決音程不均等

以畢氏音階來說，如果再從 F 出發，不斷找下五度音，就可以完成十二音階，但是這樣的音階中，有半音音程不均等的問題，這使演奏上的轉調或移調產生麻煩和困難。中國古代也同樣利用五度相生法，不斷找上五度音而得到十二音階（古代稱為十二律），但是最後得到的高八度音頻率是 $\frac{3^{12}}{2^{18}} \approx 2.023$ ，比正確的 2 要高了一些，而產生了「不能還原」（回到起始音的準高八度音）的問題。所以，東西方都一直有人在研究新的調律方法。

1584 年，即中國明朝萬曆年間，一位可媲美達文西的全能天才——朱載堉，提出了「新法密率」：將八度音中的十二個半音視為等比數列，並算出公比是 $\sqrt[12]{2} \approx 1.059463094359295264561825$ 。也就是說，竹管長度每除以這個數，就會得到高半音，所以，所有半音音程完全相同，而且十二次之後，就會得到分毫不差的高八度音。如此不但解決了中國音樂「不能還原」的問題，也幫忙解決了西方音樂轉調、移調問題，而且你絕對想不到的是，這個精細到小數點後 24 位的恐怖數字，是在算盤上算出來的，實在令人嘆為觀止！有人認為，西方的「十二平均律」正是由在中國的義大利傳教士將朱載堉的研究成果傳到歐洲去的。

樂器定出國際標準音高

在二十世紀中葉以前，全世界並沒有統一的音高標準，以中央 A 來說，音高落在 400——450 赫茲之間。為了讓世界各地所有樂器有統一的音高標準，1955 年，國際標準化組織將中央 A 的音高定為 440 赫茲而沿用至今。依此標準加上上述的密率，可算出中央這組八度音的音高如下：

C	D	E	F	G	A
261.63	293.66	329.63	349.23	392	440

B	C
493.88	523.25

曾在音樂廳聆賞交響樂團表演的人應該知道，在正式演出前，雙簧管會吹奏一個長音，讓所有樂器做最後的調音，而雙簧管所吹的音就是 A440 呵！